# 模块三 导数常规题型

## 第 1 节 函数图象切线的计算（★★☆）

### 内容提要

函数的切线方程相关计算在高考中主要有以下几类题型：

1．求曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线：切线的斜率 $k=f'(x_0)$，结合切点坐标可知切线的方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

2．求曲线 $y=f(x)$ 过点 $Q(m,n)$ 的切线：由于不知道切点坐标，故需设切点为 $P(x_0,f(x_0))$，写出切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，将点 $Q(m,n)$ 代入得到 $n-f(x_0)=f'(x_0)(m-x_0)$，由此方程解出 $x_0$，得到切点坐标，即可求出切线的方程.

3．已知直线 $y=kx+b$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象相切求参（参数在直线上或在 $f(x)$ 解析式中）：这类问题的处理方法是：如图 1，设切点横坐标为 $x_0$，可从切线斜率即为 $f'(x_0)$ 以及切点为切线与函数图象交点两方面建立方程组 $\begin{cases}k=f'(x_0)\\kx_0+b=f(x_0)\end{cases}$，解此方程组即可求出参数的值.

4．两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象有公切线：如图 2，这类题一般先设公切线与两个图象的切点分别为 $P(x_1,f(x_1))$，$Q(x_2,g(x_2))$，再写出 $f(x)$ 在点 $P$ 处和 $g(x)$ 在点 $Q$ 的切线方程，比较系数建立方程组，研究方程组解的情况.



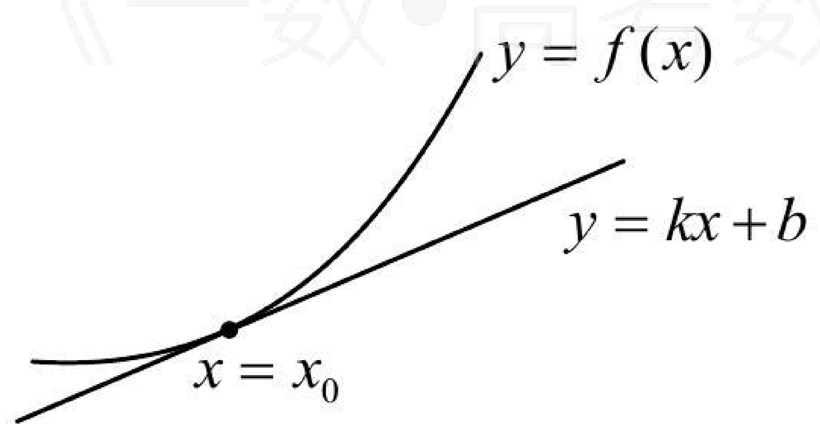


图1

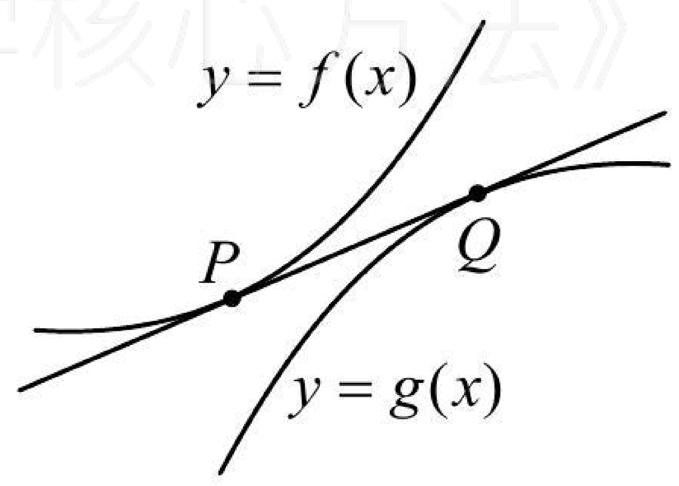


图2

### 典型例题

**类型Ⅰ：求函数在某点处的切线**

【例 1】函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为_____.

**解析：**由题意，$f(1)=0$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $f'(1)=1$，故所求切线方程为 $y=x-1$.

**答案：** $y=x-1$

【变式 1】（2020 • 新课标Ⅰ卷）曲线 $y=\ln x+x+1$ 的一条切线的斜率为 2，则该切线的方程为_____.

**解析：**已知切线斜率，可先由此求切点，$y'=\dfrac{1}{x}+1$，令 $y'=2$ 得：$\dfrac{1}{x}+1=2$，所以 $x=1$，

代入 $y=\ln x+x+1$ 可得 $y=2$，所以切点的坐标为 $(1,2)$，故所求切线方程为 $y-2=2(x-1)$，即 $y=2x$.

**答案：** $y=2x$

【变式 2】已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-2x)+1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处的切线方程为（　　）

（A）$y=x-4$　　（B）$y=x$　　（C）$y=-2x$　　（D）$y=-2x+2$

**解法 1：** 奇函数中，已知 $x<0$ 时的解析式，可先求出 $x>0$ 时的解析式，

由题意，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-2x)+1$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-[\ln(-2(-x))+1]=-\ln(2x)-1$，

故 $f'(x)=-\dfrac{1}{2x}\cdot 2=-\dfrac{1}{x}$，所以 $f'(\dfrac{1}{2})=-2$，$f(\dfrac{1}{2})=-1$，故所求切线方程为 $y-(-1)=-2(x-\dfrac{1}{2})$，即 $y=-2x$.

**解法 2：** 也可直接由 $x<0$ 的解析式求 $f'(-\dfrac{1}{2})$，再用奇函数的对称性得出 $f'(\dfrac{1}{2})$，

由题意，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-2x)+1$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{-2x}\cdot(-2)=\dfrac{1}{x}$，故 $f'(-\dfrac{1}{2})=-2$，

又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f'(\dfrac{1}{2})=f'(-\dfrac{1}{2})=-2$，（原因见反思）

$f(\dfrac{1}{2})=-f(-\dfrac{1}{2})=-[\ln(-2\times(-\dfrac{1}{2}))+1]=-1$，故所求切线的方程为 $y-(-1)=-2(x-\dfrac{1}{2})$，整理得：$y=-2x$.

**答案：** C

**【反思】** ①如图 1，若函数的图象关于点 $(a,b)$ 对称，则图象上关于 $(a,b)$ 对称的两个点处导数值相等；②如图 2，若函数的图象关于直线 $x=a$ 对称，则图象上关于 $x=a$ 对称的两个点处，导数值相反.



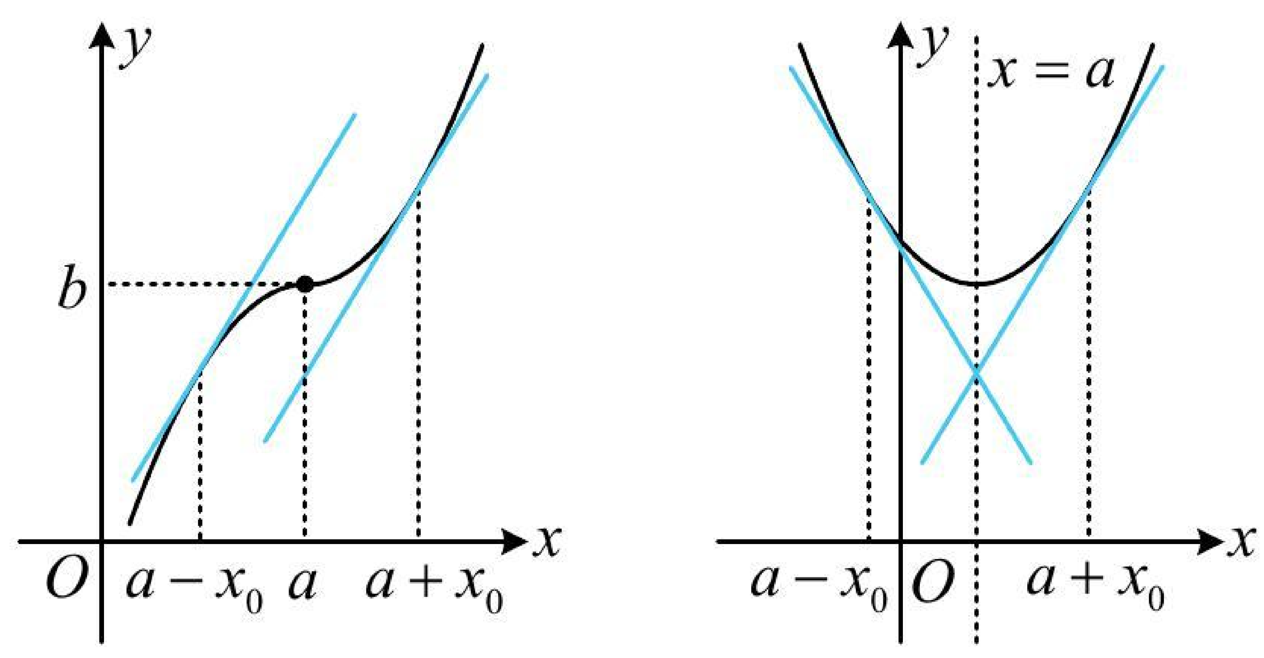



图1　　图2

**类型Ⅱ：求函数过某点的切线**

【例 2】（2022·新高考Ⅱ卷）曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为_____，_____.

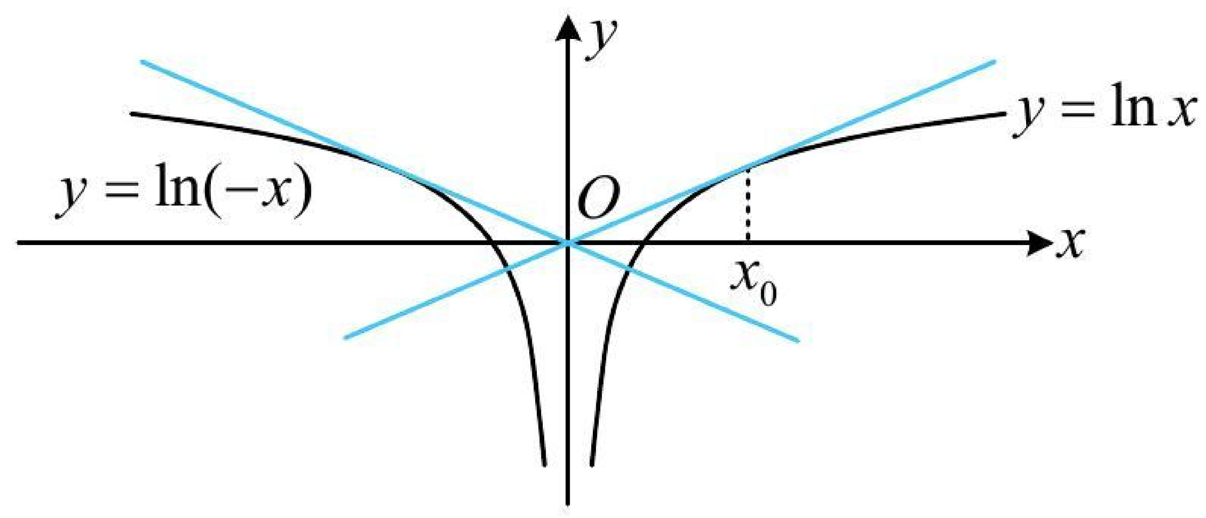
**解析：** 曲线 $y=\ln|x|$ 如图，由对称性，可先求该曲线位于 $y$ 轴右侧部分的过原点的切线，

此部分的解析式为 $y=\ln x$，由于不知道切点，所以设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，

因为 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以该切线的方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，将原点 $(0,0)$ 代入可得：$-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}\cdot(-x_0)$，

解得：$x_0=\mathrm{e}$，故切线方程为 $y-\ln\mathrm{e}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，整理得：$y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$，由对称性知另一条切线为 $y=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$.

**答案：** $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$，$y=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$




【变式 1】曲线 $y=x^3-x-2$ 过点 $P(2,4)$ 的切线方程为_____.

**解析**：不知道切点，先设切点，设切点为 $(x_0,x_0^3-x_0-2)$，

由题意，$y'=3x^2-1$，所以切线方程为 $y-(x_0^3-x_0-2)=(3x_0^2-1)(x-x_0)$ ①，

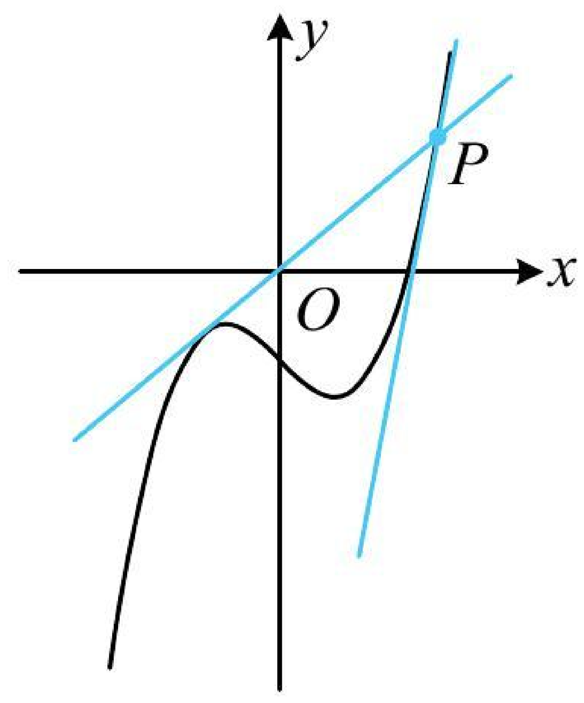
将点 $(2,4)$ 代入得：$4-(x_0^3-x_0-2)=(3x_0^2-1)(2-x_0)$，整理得：$x_0^3-3x_0^2+4=0$，

解一元三次方程可先试根，观察可得 $x_0=-1$ 是上述方程的一个解，那么因式分解就有了方向，

$x_0^3-3x_0^2+4=x_0^3+x_0^2-4x_0^2+4=x_0^2(x_0+1)-4(x_0+1)(x_0-1)=(x_0+1)(x_0-2)^2$，所以 $(x_0+1)(x_0-2)^2=0$，

解得：$x_0=-1$ 或 2，代入式①得所求切线为 $y=2x$ 或 $y=11x-18$.（两条切线如图）

**答案**：$y=2x$ 或 $y=11x-18$






**【反思】**求函数过某点的切线方程，常按设切点，写出切线方程，将已知点代入求得切点的流程求解.

【变式 2】（2021·新高考Ⅰ卷）若过点 $(a,b)$ 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线，则（　　）

（A）$\mathrm{e}^b<a$　　（B）$\mathrm{e}^a<b$　　（C）$0<a<\mathrm{e}^b$　　（D）$0<b<\mathrm{e}^a$

**解法 1**：不知道切点，可先设切点，设切点为 $(t,\mathrm{e}^t)$，因为 $y'=\mathrm{e}^x$，所以切线方程为 $y-\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t(x-t)$，

将点 $(a,b)$ 代入整理得：$b=\mathrm{e}^t(a+1-t)$，故问题等价于关于 $t$ 的方程 $b=\mathrm{e}^t(a+1-t)$ 有 2 个实数解，

接下来将 $t$ 看成自变量，构造函数分析，设 $f(t)=\mathrm{e}^t(a+1-t)$，则 $f'(t)=\mathrm{e}^t(a-t)$，

所以 $f'(t)>0\Leftrightarrow t<a$，$f'(t)<0\Leftrightarrow t>a$，故 $f(t)$ 在 $(-\infty,a)$ 上↗，在 $(a,+\infty)$ 上↘，

又 $f(a)=\mathrm{e}^a$，$\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=-\infty$，所以 $y=f(t)$ 的大致图象如图 1，

方程 $b=\mathrm{e}^t(a+1-t)$ 有 2 个实数解等价于直线 $y=b$ 与 $y=f(t)$ 的图象有 2 个交点，由图可知 $0<b<\mathrm{e}^a$.

**解法 2**：也可画 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象分析点 $(a,b)$ 的位置，曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 及其渐近线 $x$ 轴将平面直角坐标系分成 4 部分，可分别考虑某点位于这 4 个部分时，过该点可作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 几条切线，

如图 2，对于曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上方的点，如图 2 中的点 $A$，作不出过点 $A$ 的切线；

对于曲线 $y=e^x$ 上的点，显然只能作 1 条切线；

对于曲线 $y=e^x$ 和 $x$ 轴之间的点，如图 2 中的 $P(a,b)$，过 $P$ 可作 2 条切线，

此时，点 $P$ 的纵坐标 $b$ 应大于 0 且小于 $y=e^x$ 在 $x=a$ 处的函数值，所以 $0<b<e^a$；

对于 $x$ 轴上或 $x$ 轴下方的点，如图 2 中的点 $B$，只能作 1 条切线；

综上所述，$0<b<e^a$.

答案：D

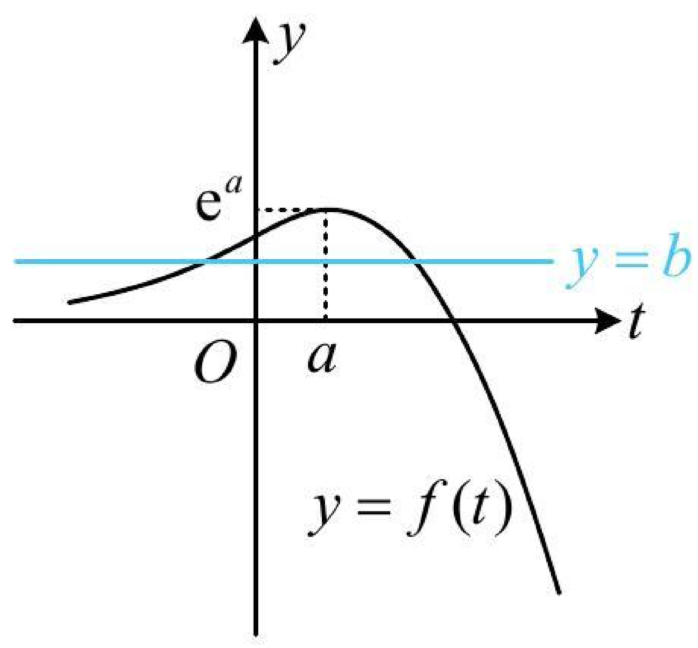



图1

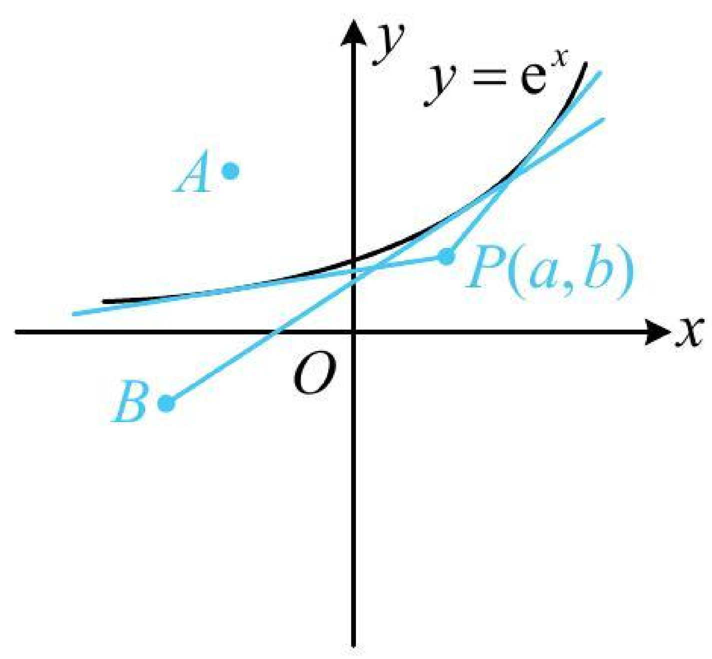



图2

【反思】数形结合是一种重要的数学思想，像这种研究过某点可作某函数图象几条切线的问题，若函数的图象较为简单，则画图分析往往是优越的解法.

**类型Ⅲ：已知某直线与函数相切求参**

【例 3】已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切，则 $a=$_____.

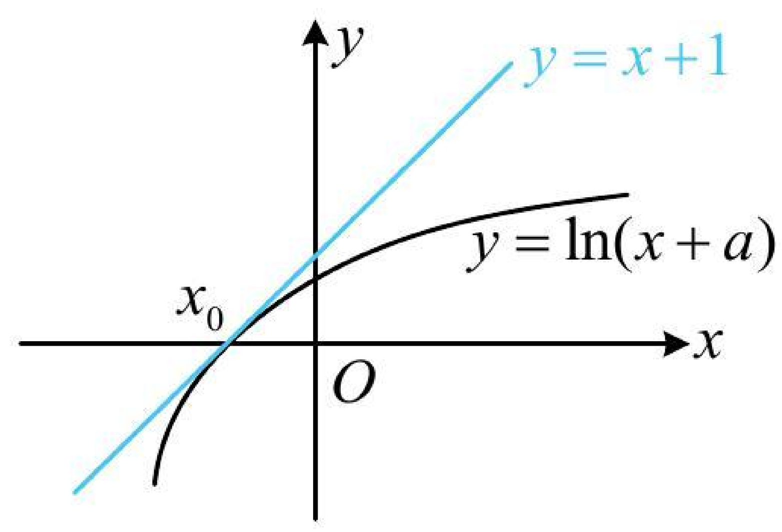


**解析：**已知切线求参，用内容提要 3 的方法，$y=\ln(x+a)\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x+a}$，设切点横坐标为 $x_0$，

如图，$\begin{cases}\dfrac{1}{x_0+a}=1 & ①(x_0\text{处的导数与切线斜率相等})\\ x_0+1=\ln(x_0+a) & ②(x_0\text{处是切线和函数图象的交点})\end{cases}$，

由①可得 $x_0+a=1$，代入②可解得：$x_0=-1$，所以 $a=1-x_0=2$.

答案：2




【总结】已知直线与函数图象相切求参这类问题，常抓住切点处导数等于切线斜率、切点是切线与函数图象交点这两方面来建立方程组求解参数.

**类型Ⅳ（此类型较难）：两个函数图象的公切线问题**

【例 4】已知直线 $l$ 是曲线 $y=e^x-1$ 与 $y=\ln x+1$ 的公切线，则 $l$ 的方程为_____.

**解析：**直线 $l$ 与两曲线的切点均未知，可设两个切点，分别写出切线 $l$ 的方程，比较系数，

如图，设两个切点分别为$P(x_1,\mathrm{e}^{x_1}-1)$，$Q(x_2,\ln x_2+1)$，

因为$(\mathrm{e}^x-1)'=\mathrm{e}^x$，所以$l$的方程为$y-(\mathrm{e}^{x_1}-1)=\mathrm{e}^{x_1}(x-x_1)$，整理得：$y=\mathrm{e}^{x_1}x+(1-x_1)\mathrm{e}^{x_1}-1$ ①，

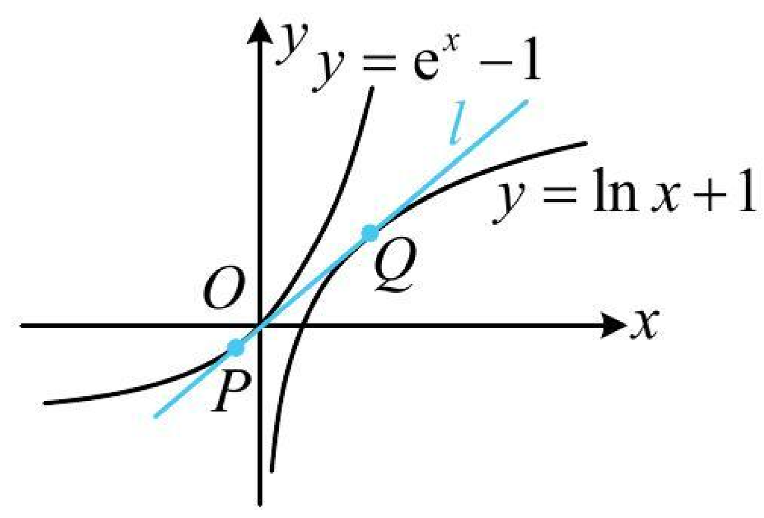
又$(\ln x+1)'=\dfrac{1}{x}$，所以$l$的方程为$y-(\ln x_2+1)=\dfrac{1}{x_2}(x-x_2)$，整理得：$y=\dfrac{1}{x_2}x+\ln x_2$ ②，

由于①和②都是切线$l$的方程，所以$\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1}=\dfrac{1}{x_2} & ③\\ (1-x_1)\mathrm{e}^{x_1}-1=\ln x_2 & ④\end{cases}$，

由③可得$x_2=\mathrm{e}^{-x_1}$，代入④得：$(1-x_1)\mathrm{e}^{x_1}-1=\ln\mathrm{e}^{-x_1}$，化简得：$(x_1-1)(\mathrm{e}^{x_1}-1)=0$，解得：$x_1=1$或$0$，

代入①得直线$l$的方程为$y=\mathrm{e}x-1$或$y=x$.

**答案：** $y=\mathrm{e}x-1$或$y=x$




【变式】若曲线$y=\mathrm{e}^{x-1}$和曲线$y=\sqrt{ax}(a>0)$存在公切线，则$a$的最大值为_____.

**解析：** 涉及两曲线的公切线问题，考虑设两个切点，分别写出切线，再比较系数，



设公切线与所给两曲线的切点分别为$P(x_1,\mathrm{e}^{x_1-1})$，$Q(x_2,\sqrt{ax_2})$，

因为$(\mathrm{e}^{x-1})'=\mathrm{e}^{x-1}$，所以公切线为$y-\mathrm{e}^{x_1-1}=\mathrm{e}^{x_1-1}(x-x_1)$，整理得：$y=\mathrm{e}^{x_1-1}x+(1-x_1)\mathrm{e}^{x_1-1}$ ①，

因为$(\sqrt{ax})'=\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}$，所以公切线也为$y-\sqrt{ax_2}=\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x_2}}(x-x_2)$，整理得：$y=\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x_2}}x+\dfrac{\sqrt{ax_2}}{2}$ ②，

比较①②可得$\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1-1}=\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x_2}} & ③\\ (1-x_1)\mathrm{e}^{x_1-1}=\dfrac{\sqrt{ax_2}}{2} & ④\end{cases}$，要分析$a$的最大值，应把$a$反解出来，并消元化单变量函数分析，

③×④可得$(1-x_1)\mathrm{e}^{2x_1-2}=\dfrac{a}{4}$，所以$a=4(1-x_1)\mathrm{e}^{2x_1-2}$ ⑤，由④可得$(1-x_1)\mathrm{e}^{x_1-1}=\dfrac{\sqrt{ax_2}}{2}>0$，所以$x_1<1$，

接下来可将$x_1$看成自变量，构造函数求导分析最大值，

设$f(x)=4(1-x)\mathrm{e}^{2x-2}(x<1)$，则$f'(x)=4[-1\cdot\mathrm{e}^{2x-2}+(1-x)\cdot 2\mathrm{e}^{2x-2}]=4(1-2x)\mathrm{e}^{2x-2}$，

所以$f'(x)>0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<x<1$，故$f(x)$在$(-\infty,\dfrac{1}{2})$上↗，在$(\dfrac{1}{2},1)$上↘，

所以$f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，由⑤知$a=f(x_1)$，所以$a$的最大值为$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

**答案：** $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

【总结】不同切点处的公切线问题，常设两个切点，分别写出切线 $l$ 方程，比较系数建立方程组求解或分析解的个数.

## 强化训练

1．（2023•全国乙卷（改）•★）已知函数 $f(x)=(\frac{1}{x}+a)\ln(1+x)$．当 $a=-1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为_____.

2．（2022•阜阳期末•★★）函数 $f(x)=\sin 2x+4\cos x$ 的图象在 $x=x_0$ 处切线斜率的最小值为（　　）

（A）$-6$　　（B）$-5$　　（C）2　　（D）3

3．（2022•成都模拟•★★）直线 $y=kx-2$ 与曲线 $y=x\ln x$ 相切，则实数 $k=$_____.



4．（2022•黄山模拟•★★★）若 $f(x)=\ln x$ 图象上 $(1,0)$ 处的切线与 $g(x)=\frac{\ln x+a}{x}(a\in\mathbf{R})$ 的图象也相切，则 $a=$_____.

5．（2019•江苏卷•★★★）点 $A$ 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 $A$ 处的切线经过点 $(-e,-1)$，则点 $A$ 的坐标是_____.

6．（2022•新高考Ⅰ卷•★★★）若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 $a$ 的取值范围为_____.

7．（2022•亳州模拟•★★★）已知 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{2x-1}+\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 在点 $(-\dfrac{1}{2},f(-\dfrac{1}{2}))$ 处的切线方程为_____.

8．（★★★）已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，若 $f(x-1)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $x+y+2=0$，则 $f(-2)+f'(-2)=$_____.

9．（2022•深圳模拟•★★★）已知 $a>0$，若过点 $P(a,b)$ 可作曲线 $y=x^3$ 的三条切线，则（）

（A）$b<0$　（B）$0<b<a^3$　（C）$b>a^3$　（D）$b(b-a^3)=0$



10．（2022•金华期末•★★★★）已知函数 $f(x)=|\ln x|$ 的图象在点 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线互相垂直且交于点 $P(x_0,y_0)$，则（　　）

（A）$x_1x_2=-1$　（B）$x_1x_2=\mathrm{e}$　（C）$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$　（D）$x_0=\dfrac{2}{x_1+x_2}$

11．（2023•全国联考•★★★★）若曲线 $y=x^2-1$ 与 $y=a\ln x-1(a>0)$ 存在公切线，则 $a$ 的取值范围是（　　）

（A）$(0,2\mathrm{e}]$　（B）$(0,\mathrm{e}]$　（C）$[2\mathrm{e},+\infty)$　（D）$(\mathrm{e},2\mathrm{e}]$